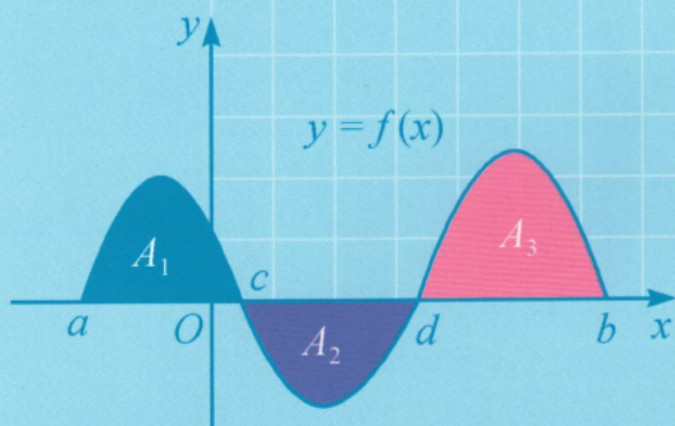




高等职业教育创新型教材



高职应用数学

梁薇 唐冰 ● 主编 (上册)



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

目 录

CONTENTS

第 1 章	数学基础知识及其应用	001
§ 1.1	三角函数与反三角函数	002
一、三角函数		002
二、反三角函数		006
三、三角函数在电学中的应用		011
习题 1.1		013
§ 1.2	幂函数、指数函数与对数函数	015
一、指数和对数		015
二、幂函数、指数函数与对数函数的概念		018
三、指数函数、对数函数在电学中的应用		019
习题 1.2		020
§ 1.3	向量及其应用	021
一、向量		021
二、向量的应用		026
习题 1.3		029
§ 1.4	复数及其应用	030
一、复数		030
二、复数的应用		038
习题 1.4		042
自测题一		044

第 2 章	函数、极限与连续	046
§ 2.1	函数	047
一、函数的概念		047
二、函数的特性		052
三、初等函数		052
习题 2.1		054
§ 2.2	函数的极限及其运算	056
一、数列的极限		056
二、函数的极限		058
三、无穷小与无穷大		060
四、极限的运算法则		062
五、两个重要极限		065
习题 2.2		066
§ 2.3	函数的连续性	067
一、函数的增量		068
二、函数连续性的定义		068
三、初等函数的连续性		070
四、闭区间上连续函数的性质		071
习题 2.3		072
§ 2.4	初等模型	073
习题 2.4		075
自测题二		076
第 3 章	微分学及其应用	078
§ 3.1	导数	079
一、案例		079
二、导数的定义		080
三、导数实际意义举例		083
四、导数的几何意义		084
习题 3.1		084
§ 3.2	函数的求导法则	085
一、函数的和、差、积、商的求导法则		085
二、基本初等函数的求导公式		087
三、复合函数的求导法则		088
习题 3.2		090
§ 3.3	隐函数的导数及高阶导数	092
一、隐函数的导数		092

二、对数求导法	093
三、高阶导数	094
习题 3.3	095
§ 3.4 函数的微分	096
一、微分的定义	096
二、微分的几何意义	098
三、微分的基本公式与运算法则	098
四、微分在近似计算中的应用	100
习题 3.4	101
§ 3.5 导数的应用	102
一、函数的单调性	102
二、曲线的凹凸性	104
三、函数的极值	106
四、函数的最值	109
五、导数的应用	112
习题 3.5	114
§ 3.6 曲线的弯曲程度——曲率	116
一、曲率的概念	116
二、曲率的计算公式	117
三、曲率圆	119
习题 3.6	119
自测题三	120
第 4 章 积分学及其应用	122
§ 4.1 定积分	123
一、案例	123
二、定积分的概念	124
三、定积分的几何意义	125
四、定积分的性质	126
习题 4.1	127
§ 4.2 微积分的基本公式	128
一、原函数和不定积分的概念	128
二、基本积分公式	130
三、不定积分的性质	130
四、微积分基本公式(牛顿—莱布尼茨公式)	132
习题 4.2	134
§ 4.3 积分方法	135

800	一、换元积分法	135
400	二、分部积分法	141
200	习题 4.3	145
200	§ 4.4 无限区间上的广义积分	147
300	习题 4.4	148
200	§ 4.5 定积分的模型及其应用	149
800	一、定积分的微元法	149
001	二、定积分的应用	150
101	习题 4.5	157
501	自测题四	158
105		
401	第 5 章 微分方程	161
001	§ 5.1 微分方程的基本概念	162
001	习题 5.1	164
111	§ 5.2 一阶常微分方程的解法	164
111	一、可分离变量的微分方程	164
011	二、一阶线性微分方程	166
011	习题 5.2	168
111	§ 5.3 二阶常微分方程的解法	168
011	一、可降阶的二阶微分方程	169
011	二、二阶线性微分方程	170
051	习题 5.3	173
051	§ 5.4 微分方程模型	173
051	习题 5.4	179
051	自测题五	180
051		
151	数学建模简介	182
051	数学实验一	189
051	习题答案	209
051	参考文献	227
051	附录	228
021	附录一 常用的基本初等函数的图像和性质	228
021	附录二 常用数学公式	231
021	附录三 简易积分公式	235
021	附录四 数学家简介一	245

§ 3.1 导数

本节主要介绍导数的概念、性质和基本求导公式.下面通过两个经典实例引出导数的概念,进而得出求函数导数的方法.

一、案例

案例 1 变速直线运动的瞬时速度.

数学描述:设物体做变速直线运动,运动方程即位移与时间的函数关系为 $s = s(t)$,求物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

速度表示路程相对于时间变化的快慢程度.我们知道,若物体做匀速运动,则物体在任一时刻的运动速度为常量,且有

$$v = \frac{\text{经过的位移}}{\text{所花的时间}}.$$

当物体做变速运动时,就不能按上式计算物体在某一时刻的运动速度了.

先考虑 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内,物体的运动速度问题:在时间 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内物体经过的位移为 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$,比值 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$,称为物体在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内的平均速度.

显然, Δt 越小, $\bar{v}$ 就越趋近于 $v(t_0)$.当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,若平均速度 $\bar{v}$ 的极限存在,则此极限值就是物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$,即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

案例 2 平面曲线的切线斜率.

数学描述:设曲线 C 的方程为 $y = f(x)$,求曲线 C 在点 M 处切线的斜率.

如图 3.2 所示,设 N 是曲线 C 上与点 M 邻近的一点,连接点 M 和点 N 的直线 MN 称为曲线 C 的割线.如果当点 N 沿着曲线 C 趋近于点 M 时,割线 MN 绕着点 M

转动而趋近于极限位置 MT , 这个极限位置的直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 这里, 极限位置的含义是: 只要弦长 $|MN|$ 趋近于零, $\angle NMT$ 也趋近于零.

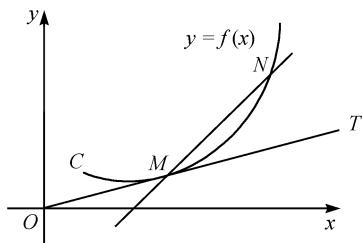


图 3.2

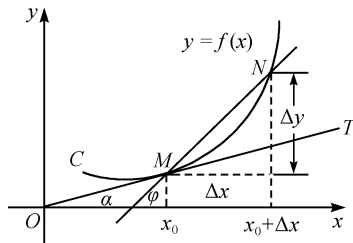


图 3.3

斜率表示直线上点的纵坐标相对于横坐标变化的快慢程度, 切线 MT 的斜率不易直接求得, 要先求割线 MN 的斜率. 如图 3.3 所示, 设点 M 、 N 的坐标分别为 (x_0, y_0) 、 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 割线 MN 的倾斜角为 φ , 切线 MT 的倾斜角为 α , 则割线 MN 的斜率为

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

显然, Δx 越小, 点 N 沿曲线 C 越趋近于点 M , 割线 MN 的斜率越趋近于切线 MT 的斜率. 当点 N 沿曲线 C 无限趋近于点 M , 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 若割线 MN 的斜率的极限存在, 则此极限值就是曲线 C 在点 M 处切线的斜率, 即

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

尽管上面两个变化率问题的实际意义不同, 但其解法是相同的, 都是先求某一区间内的平均变化率(平均速度、割线的斜率), 从而得到某点变化率的近似值, 再通过取极限, 由近似变化率过渡到精确变化率(瞬时速度、切线的斜率); 计算式子也是相同的, 都是计算同一类型的极限: 当自变量增量趋于零时, 函数增量与自变量增量之比的极限, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学、工程技术领域, 还有许多问题可以归结为求这种极限, 如速度、电流、角速度等, 我们把这种形式的极限定义为函数的极限.

二、导数的定义

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx ($x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 函数有相应的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 Δy 与 Δx 之比的极限存在, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处

可导,并称这个极限值为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或变化率),记作 $f'(x_0)$,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

也可记为 $y' \big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx} \bigg|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数或导数存在.如果(3.1)式的极限不存在,就说函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处不可导.如果不可导的原因是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$,为了方便起见,也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大,记为 $f'(x_0) = \infty$.

定义 2 如果函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内每一点都可导,则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导.这时,对于 (a, b) 内的任意一点 x ,都有导数值 $f'(x)$ 与它对应,因此 $f'(x)$ 是 x 的函数,我们称 $f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的导函数,记作 $f'(x)$,即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

也可记为 y' 、 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

显然,函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数,就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0) = f'(x) \big|_{x=x_0}.$$

常把导函数 $f'(x)$ 简称为导数.在求导数时,若没有指明是求某一定点的导数,都是指求导函数.

根据导数的定义求 $y = f(x)$ 的导数,一般可分为以下三个步骤:

(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

(2) 求两个增量的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

例 1 求函数 $f(x) = C$ (C 为常数) 的导数.

解 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$;

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$;

(3) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

即 $(C)' = 0$.

这就是说,常数的导数等于零.

例 2 求函数 $f(x) = x^2$ 的导数.

解 (1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x)^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$(3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

即 $(x^2)' = 2x$.

一般的,对于幂函数 $y = x^a (a \in \mathbf{R})$,有以下求导公式:

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

例 3 求 $y = \sin x$ 的导数.

解 (1) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$;

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

$$(3) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

即 $(\sin x)' = \cos x$.

同理可得 $(\cos x)' = -\sin x$.

例 4 求下列函数的导数.

$$(1) y = x^7; \quad (2) y = \sqrt{x}; \quad (3) y = \frac{1}{x^2}; \quad (4) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}.$$

解 (1) $y' = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$;

$$(2) y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(3) y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3};$$

$$(4) y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \right)' = (x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6 \sqrt[6]{x^5}}.$$

例 5 设 $f(x) = \sin x$, 求 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

解 因为 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos x \big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

GAOZHI YINGYONG SHUXUE

策划编辑 张贻松
项目负责 黄丽艳
责任编辑 黄丽艳
责任校对 陈俊海
责任技编 伍智辉
装帧设计 黄璐霜 [广大迅风艺术 ]

ISBN 978-7-5598-3052-4



9 787559 830524 >

定价: 39.00 元