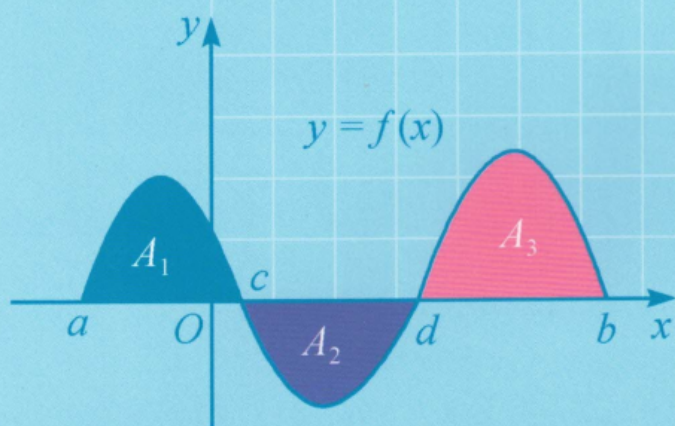




高等职业教育创新型教材



高职应用数学

梁薇 唐冰 ● 主编 (上册)



GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

广西师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高职应用数学. 上册 / 梁薇, 唐冰主编. --2 版. --
桂林: 广西师范大学出版社, 2020.9 (2022.9 重印)
高等职业教育创新型教材
ISBN 978-7-5598-3052-4

I. ①高… II. ①梁…②唐… III. ①应用数学—
高等职业教育—教材 IV. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 128458 号

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市五里店路 9 号 邮政编码: 541004)
网址: <http://www.bbtpress.com>

出版人: 黄轩庄

全国新华书店经销

广西民族印刷包装集团有限公司印刷

(南宁市高新区高新三路 1 号 邮政编码: 530007)

开本: 787 mm × 1 092 mm 1/16

印张: 16 字数: 314 千

2020 年 9 月第 2 版 2022 年 9 月第 4 次印刷

定价: 39.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与出版社发行部门联系调换。

目 录

CONTENTS

第 1 章	数学基础知识及其应用	001
§ 1.1	三角函数与反三角函数	002
一、三角函数		002
二、反三角函数		006
三、三角函数在电学中的应用		011
习题 1.1		013
§ 1.2	幂函数、指数函数与对数函数	015
一、指数和对数		015
二、幂函数、指数函数与对数函数的概念		018
三、指数函数、对数函数在电学中的应用		019
习题 1.2		020
§ 1.3	向量及其应用	021
一、向量		021
二、向量的应用		026
习题 1.3		029
§ 1.4	复数及其应用	030
一、复数		030
二、复数的应用		038
习题 1.4		042
自测题一		044

第 2 章	函数、极限与连续	046
§ 2.1	函数	047
一、函数的概念		047
二、函数的特性		052
三、初等函数		052
习题 2.1		054
§ 2.2	函数的极限及其运算	056
一、数列的极限		056
二、函数的极限		058
三、无穷小与无穷大		060
四、极限的运算法则		062
五、两个重要极限		065
习题 2.2		066
§ 2.3	函数的连续性	067
一、函数的增量		068
二、函数连续性的定义		068
三、初等函数的连续性		070
四、闭区间上连续函数的性质		071
习题 2.3		072
§ 2.4	初等模型	073
习题 2.4		075
自测题二		076
第 3 章	微分学及其应用	078
§ 3.1	导数	079
一、案例		079
二、导数的定义		080
三、导数实际意义举例		083
四、导数的几何意义		084
习题 3.1		084
§ 3.2	函数的求导法则	085
一、函数的和、差、积、商的求导法则		085
二、基本初等函数的求导公式		087
三、复合函数的求导法则		088
习题 3.2		090
§ 3.3	隐函数的导数及高阶导数	092
一、隐函数的导数		092

二、对数求导法	093
三、高阶导数	094
习题 3.3	095
§ 3.4 函数的微分	096
一、微分的定义	096
二、微分的几何意义	098
三、微分的基本公式与运算法则	098
四、微分在近似计算中的应用	100
习题 3.4	101
§ 3.5 导数的应用	102
一、函数的单调性	102
二、曲线的凹凸性	104
三、函数的极值	106
四、函数的最值	109
五、导数的应用	112
习题 3.5	114
§ 3.6 曲线的弯曲程度——曲率	116
一、曲率的概念	116
二、曲率的计算公式	117
三、曲率圆	119
习题 3.6	119
自测题三	120
第 4 章 积分学及其应用	122
§ 4.1 定积分	123
一、案例	123
二、定积分的概念	124
三、定积分的几何意义	125
四、定积分的性质	126
习题 4.1	127
§ 4.2 微积分的基本公式	128
一、原函数和不定积分的概念	128
二、基本积分公式	130
三、不定积分的性质	130
四、微积分基本公式(牛顿—莱布尼茨公式)	132
习题 4.2	134
§ 4.3 积分方法	135

800	一、换元积分法	135
400	二、分部积分法	141
800	习题 4.3	145
800	§ 4.4 无限区间上的广义积分	147
800	习题 4.4	148
800	§ 4.5 定积分的模型及其应用	149
800	一、定积分的微元法	149
001	二、定积分的应用	150
101	习题 4.5	157
501	自测题四	158
501	第 5 章 微分方程	161
401	§ 5.1 微分方程的基本概念	162
001	习题 5.1	164
511	§ 5.2 一阶常微分方程的解法	164
111	一、可分离变量的微分方程	164
011	二、一阶线性微分方程	166
811	习题 5.2	168
711	§ 5.3 二阶常微分方程的解法	168
611	一、可降阶的二阶微分方程	169
011	二、二阶线性微分方程	170
051	习题 5.3	173
551	§ 5.4 微分方程模型	173
551	习题 5.4	179
551	自测题五	180
551	数学建模简介	182
551	数学实验一	189
551	习题答案	209
551	参考文献	227
551	附 录	228
021	附录一 常用的基本初等函数的图像和性质	228
021	附录二 常用数学公式	231
021	附录三 简易积分公式	235
021	附录四 数学家简介一	245

§ 3.4 函数的微分

在理论研究和实际应用中,常常会遇到这样的问题:当自变量在点 x 处有微小增量 Δx 时,求函数 $y = f(x)$ 相应的微小增量

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

这个问题看起来简单,然而,对于较复杂的函数 $f(x)$,增量 Δy 的值不易求出.这时,我们可以考虑求 Δy 的近似值.怎样求 Δy 的近似值呢?微分就是在这种背景下产生的一个概念.

一、微分的定义

案例(任务2) 一块正方形、均匀的金属薄片受温度变化影响时,其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$,问此薄片的面积改变了多少?

模型求解 如图 3.4 所示,设正方形金属薄片的边长为 x ,面积为 A ,则

$$A = x^2.$$

当边长 x 由 x_0 变为 $x_0 + \Delta x$ 时,面积的改变量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

上式包含两个部分:第一部分是 $2x_0 \Delta x$,即图中浅色阴影部分的两个矩形面积之和,是 Δx 的线性函数,是 ΔA 的

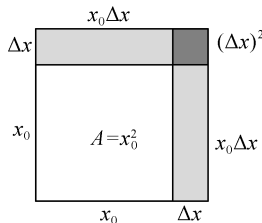


图 3.4

主要部分;第二部分是 $(\Delta x)^2$,即图中深色阴影部分的小正方形的面积,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $(\Delta x)^2$ 很小,是 ΔA 的次要部分.

由此可见,如果边长有微小改变($|\Delta x|$ 很小)时,我们可以将第二部分 $(\Delta x)^2$ 忽略,而用第一部分 $2x_0\Delta x$ 近似地表示 ΔA ,即 $\Delta A \approx 2x_0\Delta x$,因为 $A'(x_0) = 2x_0$,所以 $\Delta A \approx A'(x_0)\Delta x$,即面积的增量近似等于面积函数的导数与边长增量之积.由此我们引入微分的定义.

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,自变量 x 由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$,则 $f'(x_0)\Delta x$ 叫作函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的**微分**,记作 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x)|_{x=x_0}$,即

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x \text{ 或 } df(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

此时,也称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 处的微分,叫作函数 $y = f(x)$ 的微分,记作 dy 或 $df(x)$,即

$$dy = f'(x)\Delta x \text{ 或 } df(x) = f'(x)\Delta x.$$

例 1 求当 $x = 2, \Delta x = 0.01$ 时,函数 $y = x^2$ 的增量和微分.

解 函数的增量为 $\Delta y = (2 + 0.01)^2 - 2^2 = 0.0401$.

函数的微分为 $dy = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x$,将 $x = 2, \Delta x = 0.01$ 代入,得

$$dy = 2 \times 2 \times 0.01 = 0.04.$$

从上述案例的结果可以看出, $\Delta y \approx dy$,误差是 0.0001 .

此例子可以看作是上述案例(任务2)中,边长为 2 cm ,受温度影响后,边长增加 0.01 cm 时,正方形的面积增加了 0.0401 cm^2 ,用微分的值 0.04 近似代替面积增量时,误差只有 0.0001 .

注:当 $|\Delta x|$ 相对于 x 比较小时才能够用微分的值近似代替函数的增量.

对于函数 $y = x$,它的微分是 $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$,即

$$dx = \Delta x.$$

也就是说,自变量的微分等于自变量的增量.

于是,函数的微分可以写成

$$dy = f'(x)dx,$$

即函数的微分等于函数的导数与自变量微分的乘积,从而有 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$,也就是说,

函数微分与自变量微分的商等于函数的导数,因此,导数通常也叫作**微商**.

综上所述,若函数可导,则函数必可微;反之,若函数可微,则函数必可导.因此,导数与微分是一致的,通常把导数和微分统称为**微分**.

二、微分的几何意义

如图 3.5 所示, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的坐标为 $(x_0, f(x_0))$, 过点 M 作切线 MT , 它的倾角为 α , 当自变量 x 有微小的增量 Δx 时, 相应的曲线上纵坐标有增量 Δy , 由图可以看出

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x = \tan \alpha \cdot \Delta x = QP.$$

因此, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线上纵坐标的增量.

从图 3.5 还可看出: 当 $|\Delta x|$ 很小时, (1) $\Delta y \approx dy$; (2) 在点 M 的附近, 可以用切线段来近似代替曲线段, 即所谓的“以直代曲”.

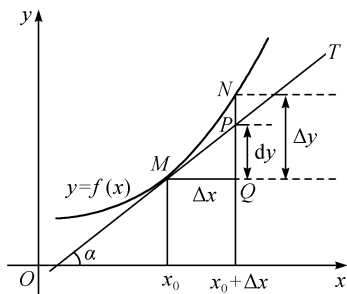


图 3.5

三、微分的基本公式与运算法则

从微分的定义 $dy = f'(x)dx$ 可知, 求函数的微分就是所给函数的导数乘以 dx , 所以由导数的基本公式和运算法则就可以得到微分的基本公式和运算法则.

1. 微分的基本公式

- | | |
|---|---|
| (1) $d(C) = 0$ (C 为常数); | (2) $d(x^a) = ax^{a-1}dx$; |
| (3) $d(a^x) = a^x \ln a dx$; | (4) $d(e^x) = e^x dx$; |
| (5) $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$; | (6) $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$; |
| (7) $d(\sin x) = \cos x dx$; | (8) $d(\cos x) = -\sin x dx$; |
| (9) $d(\tan x) = \sec^2 x dx$; | (10) $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$; |
| (11) $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$; | (12) $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$; |
| (13) $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; | (14) $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; |
| (15) $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$; | (16) $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$. |

2. 微分的四则运算法则

设 u, v 都是 x 的可微函数, 则有

- (1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- (2) $d(uv) = vdu + u dv$, 特别的, $d(Cu) = Cdu$ (C 是常数);
- (3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$.

3. 复合函数的微分法则

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 均可导, 按定义, 复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x \cdot dx = f'(u)\varphi'(x)dx,$$

即复合函数的微分等于复合函数的导数乘以自变量的微分.

因为 $\varphi'(x)dx = du$, 所以上式又可写成

$$dy = y'_u du \text{ 或 } dy = f'(u)du,$$

即复合函数的微分等于函数对中间变量的导数乘以中间变量的微分, 这就是复合函数的微分法则.

求导数与求微分的运算统称为微分运算.

例 2 求下列函数的微分.

$$(1) y = 3x^2 - x + 1; \quad (2) y = \tan 2^x;$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln x}; \quad (4) y = e^{-x} \cos x.$$

解 (1) 由微分的定义得

$$dy = (3x^2 - x + 1)'dx = (6x - 1)dx.$$

(2) 解法 1 由微分的定义得

$$dy = (\tan 2^x)'dx = \sec^2 2^x \cdot (2^x)'dx = 2^x \ln 2 \sec^2 2^x dx.$$

解法 2 由复合函数的微分法则得

$$dy = \sec^2 2^x d(2^x) = \sec^2 2^x \cdot (2^x)'dx = 2^x \ln 2 \sec^2 2^x dx.$$

$$(3) dy = d\sqrt{1 + \ln x} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} d(1 + \ln x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2x\sqrt{1 + \ln x}} dx.$$

(4) 由乘积的微分法则得

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{-x} \cos x) \\ &= \cos x d(e^{-x}) + e^{-x} d(\cos x) \\ &= -e^{-x} \cos x dx - e^{-x} \sin x dx \\ &= -e^{-x} (\cos x + \sin x) dx. \end{aligned}$$

例 3 在括号里填上适当的函数, 使等式成立.

$$(1) d(\quad) = x dx; \quad (2) d(\quad) = \csc^2 x dx.$$

解 与 $df(x) = f'(x)dx$ 比较可知, 这是已知函数的导数, 求原函数的问题.

$$(1) \text{ 已知函数的导数为 } x, \text{ 因为 } \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x, \text{ 所以 } d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x dx.$$

此外, $\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x$, $\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)' = x$ 等.

一般的,有 $d\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = x dx$ (C 为任意常数).

(2) 已知函数的导数为 $\csc^2 x$, 因为 $(-\cot x)' = \csc^2 x$, 所以 $d(-\cot x) = \csc^2 x dx$.

此外, $d(-\cot x + 2) = \csc^2 x dx$, $d(-\cot x - 1) = \csc^2 x dx$ 等.

一般的,有 $d(-\cot x + C) = \csc^2 x dx$ (C 为任意常数).

例 4 在括号里填上适当的常数,使等式成立.

$$(1) \cos 5x dx = (\quad) d(\sin 5x); \quad (2) x^2 dx = (\quad) d(1 - 2x^3).$$

解 (1) 因为 $d(\sin 5x) = (\sin 5x)' dx = 5 \cos 5x dx$, 所以 $\cos 5x dx = \left(\frac{1}{5}\right) d(\sin 5x)$.

(2) 因为 $d(1 - 2x^3) = -6x^2 dx$, 所以 $x^2 dx = \left(-\frac{1}{6}\right) d(1 - 2x^3)$.

GAOZHI YINGYONG SHUXUE

策划编辑 张贻松
项目负责 黄丽艳
责任编辑 黄丽艳
责任校对 陈俊海
责任技编 伍智辉
装帧设计 黄璐霜 [广大迅风艺术 ]

ISBN 978-7-5598-3052-4



9 787559 830524 >

定价: 39.00 元